УДК 51-7(519.21,519.216,519.217)

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ С КОРРЕЛИРОВАННЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Д.Н. Жабин, Е.С. Холопова

Томский политехнический университет
E-mail: Holopowa@yandex.ru

Для процессов с коррелированными приращениями введены понятия стохастического интеграла и стохастического дифференциала. Рассмотрено применение стохастических интегралов и дифференциалов для описания рынка капитала. Показано, что, не смотря на предположения классической гипотезы эффективного рынка, процессы изменения доходностей ценных бумаг являются процессами с коррелированными приращениями. С учетом этого получен аналог уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова для определения плотности вероятностей процесса изменения стоимости акций.

Рассмотрим стохастический процесс вида

$$\xi(t) = \int_{c1}^{c2} \varphi(t) d\eta(t), \qquad (1)$$

где $\eta(t)$ – случайный процесс, возникающий под воздействием внешних импульсов, который обладает коррелированными приращениями.

Случайный процесс $\eta=\eta(t)$ называется процессом с некоррелированными приращениями, если при любых $s_1 \le t_1 \le s_2 \le t_2$ величины $\eta_1=\eta(t_1)-\eta(s_1)$ и $\eta_2=\eta(t_2)-\eta(s_2)$ являются некоррелированными, т.е. выполняется:

$$M(\eta_1 - M\eta_1)(\eta_2 - M\eta_2) = 0.$$

Для любой кусочно-постоянной функции $\varphi(t)$, сохраняющей постоянные значения $y_k=\varphi(t)$ при $t_{k-1}<t\le t_k$ на конечном отрезке $[c_1,c_2]$, стохастический интеграл, который не зависит от выбора разбиения на интервалы постоянства (t_{k-1},t_k), $k=1,...,n$, определяется формулой:

$$\int_{c_1}^{c_2} \varphi(t) d\eta(t) = \sum_{k=1}^{n} y_k \Delta\eta(t_k),$$

где $\Delta\eta(t_k)$, $k=1,2,...,$ – независимые случайные величины, для которых математические ожидания и дисперсии

$$M\Delta\eta(t_k) = a_k \Delta t_k, \quad D\Delta\eta(t_k) = b_k \Delta t_k.$$

$\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$ – означают промежуток времени до появления очередного импульса. При $\Delta t_k \to 0$ мы фактически будем иметь дело с непрерывным воздействием на систему бесконечно малых независимых возмущений. При этом функции a_k и b_k имеют предел $a_k=a(t_k)$ и $b_k=b(t_k)$, где $a(t)$ и $b(t)$ – кусочно-непрерывные функции.

В этой ситуации естественно от «дискретного» вида модели можно перейти к соответствующей «непрерывной» модели. В качестве такой модели и служит стохастический интеграл вида:

$$\xi(t) = \int_{c1}^{c2} \varphi(t) d\eta(t).$$

Для этого процесса:

$$M[\eta(t)-\eta(s)] = \int_s^t a(u)du, \; D[\eta(t)-\eta(s)] = \int_s^t b(u)du,$$

$$\Delta\eta(t_k) = \eta(t_k) - \eta(t_{k-1}), \quad k=1,...,n.$$

Пусть $\varphi(t)$ – произвольная кусочно-постоянная функция, $s_1 \le t \le s_2$, удовлетворяющая условиям

$$\int_{c1}^{c2} |\varphi(t)| a(t)dt < \infty, \quad \int_{c1}^{c2} |\varphi(t)|^2 b(t)dt < \infty$$

и
$$\int_{c1}^{c2}\int_{c1}^{c2} |\varphi(t)||\varphi(s)| R(t,s)dtds < \infty.$$

И пусть

$$\int_{c_1}^{c_2} |\varphi(t)|^2 b(t)dt < \infty \quad \text{и} \quad \int_{c_1}^{c_2}\int_{c_1}^{c_2} \left|\varphi(t)\overline{\psi(s)}\right| R(t,s)dtds < \infty$$

такие, что можно найти последовательность кусочно-постоянных функций $\varphi_n(t)$, $n=1,2,...,$ сходящихся к $\varphi(t)$ в среднеквадратичном, т.е.

$$\int_{c1}^{c2}\int_{c1}^{c2} \left|(\varphi_n(t)-\varphi(t))\overline{(\varphi_n(s)-\varphi(s))}\right| R(t,s)dtds \to 0,$$

$$\int_{c1}^{c2}\int_{c1}^{c2} |\varphi_n(t)-\varphi(t)|^2 b(t)dt \to 0, \quad n,m\to\infty,$$

где $\sum\limits_{\substack{k,m\\k\ne m}} \operatorname{cov}\{\Delta\eta_k, \Delta\eta_m\} = M[\sum\limits_{\substack{k,m\\k\ne m}} R(t_k,t_m)\Delta t_k \Delta t_m],$

$$R(t,s) = R(s,t).$$

Положим:

$$\int_{c_1}^{c_2} \varphi(t)d\eta(t) = \int_{c_1}^{c_2} \varphi(t)d\eta^0(t) + \int_{c_1}^{c_2} \varphi(t)a(t)dt,$$

$$\eta^0(t) = \eta(t) - M\eta(t),$$

откуда следует, что

$$M[\int_{c_1}^{c_2} \varphi(t)d\eta(t)] = \int_{c_1}^{c_2} \varphi(t)a(t)dt,$$

$$M[\int_{c_1}^{c_2} \varphi(t)d\eta(t)\int_{c_1}^{c_2} \overline{\psi(t)d\eta(t)}] =$$

$$= \int_{c_1}^{c_2} \varphi(t)\psi(t)b(t)dt + \int_{c_1}^{c_2}\int_{c_1}^{c_2} \varphi(t)\psi(s)R(t,s)dtds +$$

$$+\int_{c_1}^{c_2} \varphi(t)a(t)dt \int_{c_1}^{c_2} \overline{\psi(t)a(t)}dt,$$

$$M\left|\int_{c_1}^{c_2} \varphi(t)d\eta(t)\right|^2 = \int_{c_1}^{c_2} |\varphi(t)|^2 b(t)dt +$$

$$+\int_{c_1}^{c_2} \varphi(t)\int_{c_1}^{c_2} \varphi(s)R(t,s)dtds + \left|\int_{c_1}^{c_2} \varphi(t)a(t)dt\right|^2.$$

Тогда соответствующая последовательность стохастических интегралов $\xi_n = \int_{c_1}^{c_2} \varphi_n(t) d\eta(t)$ будет иметь предел $\xi = \int_{c_1}^{c_2} \varphi(t) d\eta(t) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{c_1}^{c_2} \varphi_n(t) d\eta(t)$, т.е. она будет удовлетворять условиям

$$M\xi = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, M\xi_n = \underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, M\xi_m$$

$$\text{и } \|\xi_n - \xi\|^2 \to 0 \text{ при } n,m \to \infty.$$

Существование стохастического дифференциала позволяет рассмотреть понятие стохастического дифференциала.

$$d\xi(t) = \varphi(t) d\eta(t). \qquad (2)$$

Выражение (2) будем называть стохастическим дифференциалом случайного процесса с коррелированными приращениями для которого

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} \varphi(t) d\eta(t).$$

Стохастические дифференциальные уравнения являются основным инструментом моделирования физических и биологических систем, а в последнее время получили широкое распространение и при моделировании экономических систем. Наиболее часто стохастические процессы применяются для описания рынка капитала.

В качестве изучаемых процессов на рынке капитала рассмотрим процессы изменения доходностей ценных бумаг. Этот процесс характеризуют состояние рынка ценных бумаг, как некоторую линейную систему под воздействием внешних возмущений (например, восприятие рынком новой информации) и может быть описан стохастическим интегралом [1]. В финансовой математике существует точка зрения, согласно которой процесс изменения доходностей рассматривают как винеровский процесс [1, 2]. Такой процесс предполагает, что доходности подчинены нормальному закону распределения $\sim N(0,\Delta t)$ и обладают независимостью приращений. Под независимостью приращений в данном случае понимается их некоррелированность в различные моменты времени.

Гипотеза эффективного рынка является классической теорией финансовой математики. Эта гипотеза утверждает, что прошлая информация не влияет на рыночную активность, т.к. эта информация общеизвестна [3–5]. Эффективный рынок представляется таким, где в ценах уже учтена и обесценена вся публичная информация, отражена как общеэкономическая, так и собственная ценовая история. Текущие цены акций полностью отражают все, что скрыто в исторической последовательности цен, так что знание этой последовательности не имеет значения при формировании ожиданий касательно цен будущих, а также все, что можно было узнать о компаниях, чьи акции находятся в обращении. Следовательно, ценовые изменения можно считать независимыми [1].

Однако ожидания будущего проистекают из опыта. Этот эффект обратной связи, эхо прошлого, влияющее на настоящее, и настоящее, влияющее на будущее, – он чаще всего игнорируется, и особенно в теории рынков капитала.

Проведенными исследованиями на нормальность распределения была выявлена асимметрия в плотностях распределения величин доходностей [6]. Соответственно эти величины не будут подчинены нормальному закону распределения и не будут винеровскими. Учитывая влияние прошлой информации, можно предположить, что процессы изменения доходностей будут процессами с коррелированными приращениями.

Для анализа были взяты дневные данные, отражающие значение котировок акций ЛУКойл, ЮКОС, а также индексов Российской торговой системы (РТС) и Standard and poor 500 (*S&p*500), которые являются обобщающими показателями котировок акций крупнейших компаний. При этом длина временного ряда составляет 1400 дн., а расстояние между величинами η_1 и η_2 – от 1 до 30 дн. Результаты расчета представлены на графиках. Они отражают значения коэффициентов корреляции r по мере увеличения расстояния между величиной доходности η_1 и всеми последующими за ней величинами.

Расчет показал, что величины корреляции отличны от нуля, а значит, исследуемые процессы не являются процессами с некоррелированными приращениями и их нельзя рассматривать как винеровский. Рассматриваемые временные ряды обладает памятью. При этом память значения «*завтра*» обуславливается не только значением «*сегодня*», но и значением «*вчера*». Чтобы проверить глубину связи между исследуемыми нами дневными данными, были рассчитаны также значения корреляции, рис. 1–4, которые показали, что память процесса очень короткая. Глубина связи между значениями доходностей составляет в основном два дня. Далее связь очень незначительна, и можно считать, что она практически отсутствует. Близкое к нулю значение корреляции на третий день обуславливается влиянием сочетания положительной корреляции в первый день и отрицательным значением во второй. И если сделать перерасчет, то можно снова получить наличие корреляции. Заметим также, что мы имеем дело не с единичным случаем. Такой результат показали все исследуемые ряды, хотя их поведение (в смысле вида их плотностей распределения изменения доходностей) очень различно. Аналогичный результат дают не только приращения доходностей, но и сами величины доходностей [7].

Для достоверности полученных расчетов, была проверена значимость коэффициентов корреляции, так как работа проводилась с выборкой случайных величин. Для этого был построен расчетный коридор с использованием t-статистики [8]. Согласно t-статистике, если наблюдаемое (расчетное) значение превышает теоретическое (табличное), то коэффициент корреляции считается значимым. Расчет проводился при уровне доверия 90 %. Значимость коэффициентов корреляции подтверждена для первых двух-трех дней, когда мы имеем отличное от нуля значение корреляции. Последующие значения, которые близки к нулю, являются незначимыми, за исключением очень редких случаев. Это говорит о том, что с течением времени нужно исследовать более поздние величины и учитывать их свойства при составлении прогнозов.

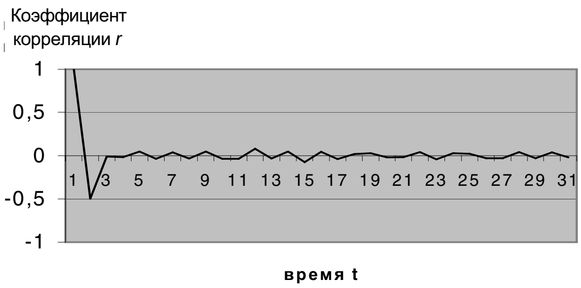

Рис. 1. *Значения коэффициентов корреляции между величинами изменения доходности акций ЛУКойл*

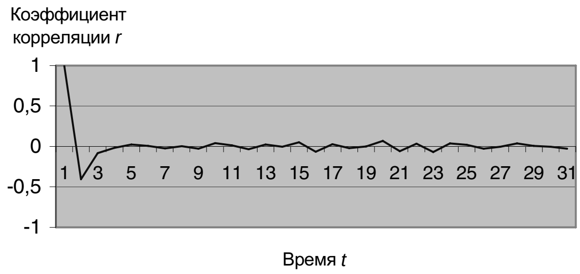

Рис. 2. *Значения коэффициентов корреляции между величинами изменения индекса S&p500*

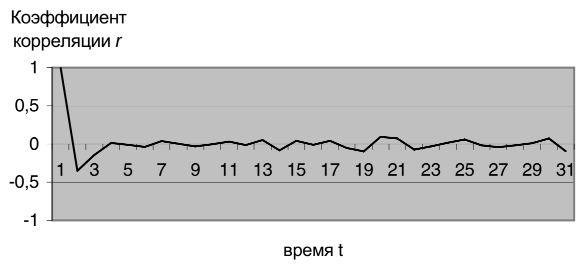

Рис. 3. *Значения коэффициентов корреляции между величинами изменения индекса РТС*

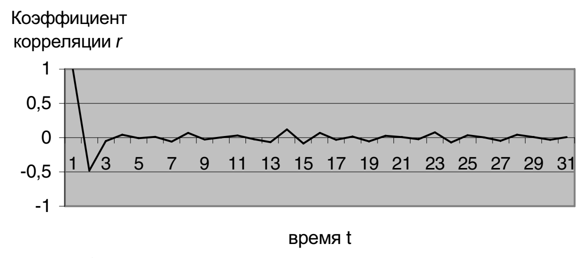

Рис. 4. *Значения коэффициентов корреляции между величинами изменения доходности акций ЮКОС*

Итак, изучаемый нами процесс изменения доходностей оказался процессом с коррелированными приращениями. Рассмотрим на примере, как коррелированность приращений отразится при определении стоимости акций.

Пусть S – стоимость акций. Для её определения в основном используются произвольные экзогенные случайные процессы вида $dS=a(S,t)dt+b(S,t)dW$, где a – коэффициент сноса, имеющий смысл процентной ставки, b – коэффициент диффузии, характеризующий волатильность процесса, W – стандартный винеровский процесс, определяющий стохастическое поведение изменения стоимости и обладающий независимыми приращениями.

С учетом того, что изменение стоимости – процесс с коррелированными приращениями, то вместо винеровского процесса случайность вернее задавать процессом с коррелированными приращениями $\eta(t)$:

$$dS = a(S,t)dt + b(S,t)d\eta(t). \qquad (3)$$

Выражение (3) имеет смысл стохастического дифференциала случайного процесса $S(t)$, такого что

$$S(t) = S(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s)ds + \int_{t_0}^{t} [b(s) + R(s)]d\eta(s).$$

Естественно, что поведение процесса изменения стоимости акций подчиняется стохастическому закону. Для этого необходимо определить вероятность перехода $p(s,x,t,y)$ случайной величины S из одного состояния x в момент s в состояние y в момент t, для $t_0 \le s \le u \le t$.

Пусть

$$S = \int_{t_0}^{t} \varphi(t)d\eta(t) \quad \text{и} \quad S(t) = \varphi(t, d\eta(t)),$$

где $\varphi(t,x)$ – произвольная непрерывная действительная функция переменных t и x, равная нулю вне конечного интервала и имеющая непрерывные производные $\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$. Положим

$$\varphi(s,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)p(s,x,t,y)dy.$$

Тогда, раскладывая функцию $\varphi(u,x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x и используя формулу Колмогорова-Чепмена, получим:

$$\varphi(u,x) - \varphi(t,x) = \left\{ a\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}b\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + O(\delta_\varepsilon)\right]\right\}(t-u) +$$
$$+\frac{1}{2}R\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cdot\min(t-u, t_1-u) + o(t-u),$$

где $O(\delta_\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$.

Если u лежит между t_1 и t и $t_1\to t$, то $\min(t-u,t_1-u)\approx$ $\approx(t-u)$ и

$$\lim_{t\to u}\frac{\varphi(u,x)-\varphi(t,x)}{t-u} = a\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}b\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}R\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},$$
$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t} = a(t,x)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}[b(t,x)+R(t,x)]\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}.$$

Учитывая определение функции $\varphi(t,x)$, уравнение можно записать следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial t} + a(t,x)\frac{\partial p}{\partial x} + \\ + \frac{1}{2}(b(t,x) + R(t,x))\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \end{bmatrix} dy = 0,$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial p}{\partial t} + a(t,x)\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}(b(t,x) + R(t,x))\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0,$$

$$-\frac{\partial p}{\partial t} = a(t,x)\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}(b(t,x) + R(t,x))\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \qquad (4)$$

Уравнение (4) представляет собой аналог уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова с измененным коэффициентом диффузии для определения плотности вероятностей случайного процесса с коррелированными приращениями, а именно процесса изменения стоимости акций.

Таким образом, рассмотрен пример применения введенных выше стохастических интегралов и дифференциалов для описания процессов рынка капитала, обладающих коррелированными приращениями, и определения плотности вероятностей этих процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розанов Ю.А. Случайные процессы. Краткий курс. – М.: Наука, 1971. – 286 с.
2. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. – М.: Наука, 1975. – 319 с.
3. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. – М.: Мир, 2000. – 333 с.
4. Peters E.E. Fractal market analysis. – N.Y.: Wiley, 1994. – 321 p.
5. Fama E.F. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work // Journal of Finance. – 1970. – № 25. – P. 18–22.
6. Жабин Д.Н., Холопова Е.С. Коэффициент асимметрии и анализ функции полезности инвестора // Журнал Физического общества республики Адыгея. – 2003. – № 10. – С. 25–27.
7. Рогов М.А. Риск-менеджмент. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 276 с.
8. Сошникова Л.А., Тамашевич В.Н., Уебе Г., Шефер М. Многомерный статистический анализ в экономике. – М.: Юнити, 1999. – 598 с.

УДК 681.3.06

БЫСТРОДЕЙСТВУЮЩИЕ АЛГОРИТМЫ ДЕЛЕНИЯ ПОЛИНОМОВ В АРИФМЕТИКЕ ПО МОДУЛЮ ДВА

Ю.Б. Буркатовская, А.Н. Мальчуков, А.Н. Осокин

Томский политехнический университет
E-mail: jgs@tpu.ru, osikin@ce.cctpu.edu.ru

Предложены быстродействующие алгоритмы деления полиномов в арифметике по модулю два, позволяющие работать с данными в параллельном виде: модификация алгоритма одновременного определения старших и младших разрядов частного, а также разработанный авторами матричный алгоритм деления полиномов. Приведён пример реализации на ПЛИС фирмы Altera кодека двоичного циклического помехоустойчивого кода, использующего матричный алгоритм ускоренного деления полиномов.

Использование помехоустойчивых кодов считается основным средством обеспечения требуемой достоверности передачи данных. В частности, двоичные циклические помехоустойчивые коды используются в системах промышленной автоматизации, радиоинтерфейсах, кодеках видеопоследовательностей, шинах передачи данных процессоров. В связи с увеличением скорости передачи данных требуются быстродействующие помехоустойчивые кодеки, которые смогут работать на частоте шины передачи данных.

Основной операцией при кодировании и декодировании двоичным циклическим помехоустойчивым кодом является операция деления полиномов в арифметике по модулю два, поэтому необходимы быстродействующие алгоритмы деления. Обычно полиномы представляются следующим образом:

$$A(x) = (\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-1-i} x^{n-1-i}); \; B(x) = (\sum_{j=0}^{m-1} b_{m-1-j} x^{m-1-j}), \qquad (1)$$

где a_i, $b_j \in \{0,1\}$; $i=\overline{0,n-1}$; $j=\overline{0,m-1}$; $n \geq m$; n – количество разрядов делимого, m – делителя.

В [1] предложен алгоритм деления полиномов в арифметике по модулю два и доказана теорема для математического обоснования основной идеи алгоритма (одновременное определение старших и младших разрядов частного), формулировка которой представлена ниже.

Теорема 1. Если полиномы вида (1) делятся без остатка, то полиномы, полученные из исходных путем изменения порядка следования коэффициентов на обратный ($A^`(x)=x^n A(x^{-1})$; $B^`(x)=x^m B(x^{-1})$), также делятся без остатка. Полученное таким образом частное будет иметь обратный порядок следования коэффициентов по сравнению с частным от деления исходных полиномов ($C^`(x)=x^r C(x^{-1})$).

В данном алгоритме автором было наложено ограничение: младшие разряды делимого и делителя должны равняться 1. Для устранения ограниче-